MILAN ĐURIĆ

OLGA ĐURIĆ-PERIĆ

STATIKA KONSTRUKCIJA

Beograd, 2018.

Prof. dr Milan Đurić
Olga Đurić-Perić

STATIKA KONSTRUKCIJA

Izdavač
AKADEMSKA MISAO
Primorska 21, Beograd

Glavni i odgovorni urednik
Marko Vujadinović

Tehnički urednik
Željko Hrček

Tiraž
500 primeraka

Štampa
Planeta print
Beograd

ISBN: 978-86-7466-713-2

PREDGOVOR

Statika konstrukcija je deo jedne stručno-naučne discipline, koja se u ruskoj literaturi naziva Mehanika konstrukcija – Строительная механика – a u anglosaksonskoj literaturi Teorija konstrukcija – Theory of Structures. Kod nas je za ovu disciplinu uobičajen naziv Teorija konstrukcija iako je naziv Mehanika konstrukcija adekvatniji, jer je reč o stručno-naučnoj disciplini čiji je zadatak analiza napona, deformacija, odnosno stabilnosti konstrukcija na bazi zakona Mehanike krutog i deformabilnog tela. Saglasno ovom zadatku, predmet Mehanike konstrukcija su oni delovi inženjerskih objekata koji osiguravaju njihovu prostornu stabilnost, delovi koje nazivamo noseće konstrukcije ili kratko nosači. Prema tome, zadatak Mehanike konstrukcija je analiza napona, deformacija, odnosno stabilnosti nosača na bazi zakona Mehanike krutog i deformabilnog tela.

Dve osnovne oblasti Mehanike konstrukcija je *Statika konstrukcija* u kojoj se proučava uticaj statičkog opterećenja na nosače i *Dinamika konstrukcija* u kojoj se proučava uticaj dinamičkog opterećenja. *Statičko opterećenje*, kao što je poznato, je opterećenje koje u toku vremena ne menja ni veličinu ni položaj, ili su te promene tako spore da ubrzanja delića pri deformisanju nosača mogu da se zanemare, dok je *Dinamičko opterećenje* ono koje u toku vremena menja ili veličinu ili položaj tako da ubrzanja delića, odnosno odgovarajuće sile inercije, ne mogu da se zanemare.

Posebno važna pitanja u Mehanici konstrukcija su pitanja stabilnosti, tj. u Statici konstrukcija pitanje da li je nosač pod datim opterećenjem u stabilnoj ili labilnoj ravnoteži, odnosno u Dinamici konstrukcija pitanje da li je kretanje (vibriranje, oscilovanje) nosača pri datom opterećenju stabilno ili labilno. Zbog važnosti ovih problema oni se obično u literaturi a i u nastavi odvajaju od Statike i Dinamike konstrukcija u posebnu oblast Mehanike konstrukcija, zvanu *Stabilnost konstrukcija*.

Pored podele Mehanike konstrukcija na Statiku i Dinamiku konstrukcija, delimo je i po predmetu, tj. prema vrsti nosača koji izučava. Nosači se sastoje ili od štapova sa pravom ili krivom osom, ili od ploča sa ravnom ili krivom srednjom površinom. Kako u Mehanici štapovi mogu da se shvate kao linije određenih geometrijskih i mehaničkih osobina, nosače koji se sastoje od štapova nazivamo *linijski nosači*. Nosače koji se sastoje od ploča, tj. od površina određenih geometrijskih i mehaničkih osobina, nazivamo *površinski nosači*. Prema ovoj podeli nosača, delimo i Mehaniku konstrukcija na Mehaniku linijskih nosača i Mehaniku površinskih nosača, odnosno njene delove: Statiku na Statiku linijskih i Statiku površinskih nosača; Dinamiku na Dinamiku linijskih i Dinamiku površinskih nosača; a Stabilnost na Stabilnost linijskih nosača pri statičkom ili pri dinamičkom opterećenju i na Stabilnost površinskih nosača pri statičkom ili dinamičkom opterećenju.

Naponi i deformacija nosača ne zavise samo od geometrijske strukture nosača, već zavise i od njegove fizičke strukture, tj. od ponašanja materijala nosača pod opterećenjem. Iz Otpornosti materijala su poznata dva osnovna oblika ponašanja materijala: elastično i plastično, odnosno elasto-plastično ponašanje materijala, tako da govorimo o Statici, Dinamici ili Stabilnosti elastičnih, plastičnih ili elasto-plastičnih linijskih ili površinskih nosača.

Posebna oblast u Mehanici konstrukcija je oblast ispitivanja napona i deformacije nosača sa viskoznim ponašanjem materijala, tj. od materijala čije deformacije zavise od vremena trajanja opterećenja. U toj oblasti reč je o Statici, Dinamici ili Stabilnosti visko-elastičnih ili visko-elasto-plastičnih linijskih i površinskih nosača.

M. Đurić

SADRŽAJ

GLAVA TREĆA

DEFORMACIJA STATIČKI ODREĐENIH NOSAČA **207**

GLAVA ČETVRTA

STATIČKI NEODREĐENI NOSAČI. METODA SILA **293**

1

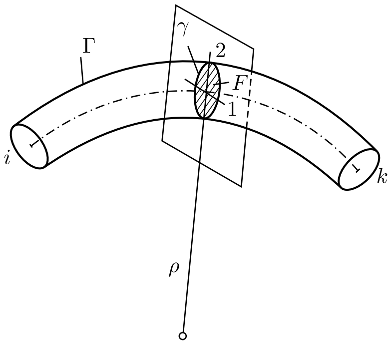
DEFINICIJA I KLASIFIKACIJA RAVNIH LINIJSKIH NOSAČA. OSNOVNE JEDNAČINE STATIKE LINIJSKIH NOSAČA U RAVNI

1.1. OSNOVNE JEDNAČINE TEHNIČKE TEORIJE SAVIJANJA ŠTAPA U RAVNI

1.1.1. Definicija štapa

Neka je ik glatka ravna ili prostorna kriva linija, slika 1. U normalnim ravnima te linije opisane su zatvorene krive γ. One ograničavaju površi F. Težišta površi F su odgovarajuće tačke linije ik a dimenzije tih površi su male u odnosu na dužinu linije ik i veličinu poluprečnika krive te linije. Geometrijsko mesto tačaka krivih γ je zatvorena površ Γ. *Telo koje ograničava površ Γ i površi F u tačkama i i k nazivamo štapom.*

Kriva ik je *osa štapa* a površi F su *poprečni preseci štapa*. Površ Γ je *omotač štapa* koji sa poprečnim presecima na krajevima predstavlja *spoljašnju površinu štapa*.



Sl. 1

Prema obliku ose razlikujemo *prave* i *krive štapove*. Ako su poprečni preseci u svim tačkama ose isti štap je *konstantnog preseka* a ako se oni duž ose štapa menjaju štap je *promenljivog preseka*.

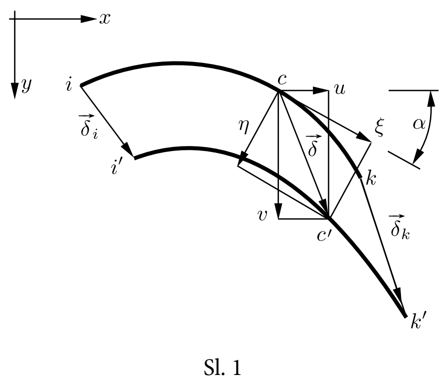
Štap čija osa sa jednom od glavnih centralnih osa inercije poprečnih preseka leži u jednoj ravni nazivamo *ravan štap* a odgovarajuću ravan *ravan štapa*. Štapove čije su ose prostorne krive linije, kao i one čije su ose prave ili ravne krive linije ali u kojih jedna od centralnih osa inercije poprečnih preseka ne leži u toj ravni nazivamo *prostorni štapovi*.

1.1.2. Deformacija ose štapa

Posmatraćemo deformaciju jednog ravnog štapa čije se tačke pomeraju u ravnima koje su paralelne sa ravni štapa. Takvu deformaciju nazivamo *ravna deformacija štapa*.

Na slici 1 prikazana je osa ik jednog ravnog štapa pre i posle deformacije.

Pri ravnoj deformaciji pomeranja $\vec{\delta}$ tačaka ose leže u ravni štapa pa će i deformisana osa $i'k'$ ležati u toj ravni. Vektori pomeranja su tada potpuno određeni sa dve komponente. U sledećem ćemo koristiti ili komponente pomeranja u i v u pravcu koordinatnih osa jednog unapred usvojenog stalnog koordinatnog sistema Oxy: $\vec{\delta} = \vec{\delta}(u, v)$, ili komponente pomeranja ξ i η u pravcu tangente i normale na posmatranom mestu ose štapa pre deformacije: $\vec{\delta} = \vec{\delta}(\xi, \eta)$. Ako sa α obeležimo ugao koji tangenta na osu štapa zaklapa sa x osom koordinatnog sistema Oxy onda između komponenti pomeranja u i v i komponenti pomeranja ξ i η postoje veze:



Sl. 1

$$
\begin{aligned}
u &= \xi \cos\alpha - \eta \sin\alpha, \\
v &= \xi \sin\alpha + \eta \cos\alpha,
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

odnosno:

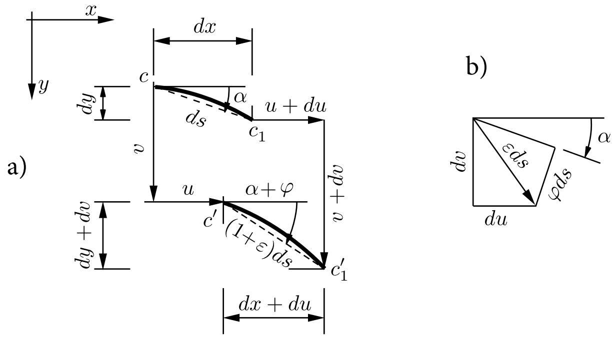
$$\begin{aligned} \xi &= u \cos\alpha + v \sin\alpha, \\ \eta &= v \cos\alpha - u \sin\alpha. \end{aligned} \tag{2}$$

Pomeranja $\vec{\delta}$ određuju deformisan oblik ose štapa ali ne daju neposredan uvid u deformaciju ose u okolini pojedinih tačaka, koju često nazivamo i deformacijom ose u malom. U pomeranjima $\vec{\delta}$ pored pomeranja koja potiču od deformacije sadržana su i ona pomeranja koja potiču od promene položaja ose u ravni štapa kao celine kao i pomeranja jednih delova ose usled deformacije drugih. Zato pored pomeranja uvodimo i druge veličine koje postoje samo na onim mestima na kojima se osa deformiše a koje su jednake nuli na onim mestima ose na kojima se ona ne deformiše. Takve veličine nazivamo *čisto deformacijskim veličinama* ili kraće *deformacijskim veličinama ose štapa*.

Da bismo definisali deformacijske veličine i napisali veze između deformacijskih veličina i pomeranja tačaka posmatraćemo deformaciju štapa u malom, tj. pomeranja i deformaciju jednog diferencijalnog elementa ose štapa cc_1, dužine ds, slika 2a. Elemenat pre deformacije zaklapa sa x osom ugao α pa su njegove projekcije na koordinatne ose:

$$\begin{aligned} dx &= ds \cos\alpha \\ dy &= ds \sin\alpha. \end{aligned} \tag{3}$$

Pri deformaciji ose elemenat prelazi u položaj $c'c_1'$, pri čemu se dužina elementa menja za veličinu $\Delta ds = \varepsilon ds$ a ugao α za veličinu $\Delta\alpha = \varphi$. Veličina ε predstavlja *dilataciju ose štapa*. Ona je čisto deformacijska veličina jer postoji samo na onim mestima na kojima se osa deformiše. Veličina φ je ugao za koji se obrne tangenta odnosno normala na osu štapa. Ona nije čisto deformacijska veličina jer može da postoji i onda kada se posmatrani elemenat ne deformiše. Međutim, veličina $d\varphi = d\Delta\alpha = \Delta d\alpha$ je čisto deformacijska veličina jer predstavlja promenu ugla između tangenti odnosno između normala u beskonačno bliskim tačkama ose, tj. promenu kontigentnog ugla na posmatranom mestu ose, koja je različita od nule samo na mestima na kojima se osa štapa deformiše.



Sl. 2

Ako su u i v komponente pomeranja tačke c u pravcu koordinatnih osa, pomeranja beskonačno bliske tačke c_1, su $u + du$ i $v + dv$. Projekcije deformisanog elementa $c'\,c_1'$ na koordinatne ose su tada $dx + du$ i $dy + dv$ pa je:

$$\begin{aligned} dx + du &= (1+\varepsilon)\cos(\alpha+\varphi)ds, \\ dy + dv &= (1+\varepsilon)\sin(\alpha+\varphi)ds. \end{aligned} \tag{4}$$

Jednačine (4) predstavljaju veze pomeranja u i v, obrtanja φ i dilatacija ε u kojima ništa nije pretpostavljeno o njihovim veličinama, pa one važe i onda kada pomeranja, obrtanja i dilatacije imaju konačne veličine. Teorija sa ovakvim vezama deformacija i pomeranja naziva se *teorija konačnih* ili *teorija velikih deformacija*.

Pomeranja, obrtanja i deformacijske veličine štapa često su tako male da je opravdano njihove kvadrate i više stepene, kao i kvadrate i više stepene njihovih izvoda zanemariti. Ova pretpostavka naziva se *pretpostavka o malim deformacijama*.

Sa pretpostavkom o malim deformacijama jednačine (4) postaju znatno jednostavnije. Kada zanemarimo kvadrate i više stepene ugla φ tada je $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = \varphi$, pa je

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\varphi) &= \cos\alpha - \varphi\sin\alpha, \\ \sin(\alpha+\varphi) &= \sin\alpha + \varphi\cos\alpha, \end{aligned} \tag{5}$$

Iz jednačina (3), (4) i (5), zanemarujući proizvod veličina ε i φ kao malu veličinu višeg reda, sledi:

$$\begin{aligned} du &= \varepsilon\cos\alpha ds - \varphi\sin\alpha ds, \\ dv &= \varepsilon\sin\alpha ds + \varphi\cos\alpha ds, \end{aligned} \tag{6}$$

odnosno

$$\begin{aligned} du &= \varepsilon dx - \varphi dy, \\ dv &= \varepsilon dy + \varphi dx. \end{aligned} \tag{7}$$

Jednačinama (6) i (7) pomeranja u i v prikazana su u funkciji veličina ε i φ. Rešenjem tih jednačina po ε i φ dobijamo:

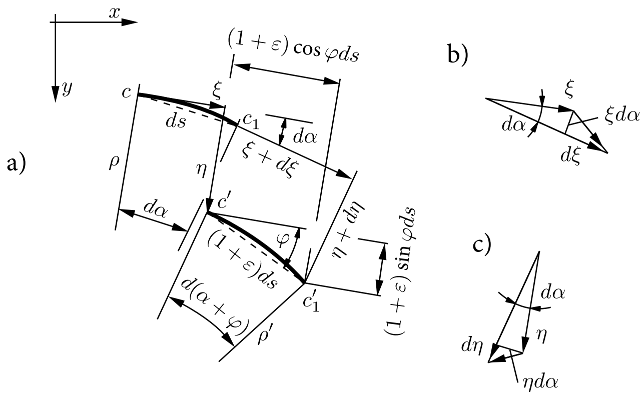
$$\begin{aligned} \varepsilon ds &= du\cos\alpha + dv\sin\alpha, \\ \varphi ds &= dv\cos\alpha - du\sin\alpha. \end{aligned} \tag{8}$$

Veze (6), (7), (8) su veze deformacija i pomeranja u teoriji koju nazivamo *teorija malih deformacija*. One su linearne zahvaljujući pretpostavci o malim deformacijama zbog čega tu pretpostavku nazivamo i *pretpostavkom o geometrijskoj linearnosti problema*.

Jednačine (6) odnosno (8) imaju jednostavno geometrijsko značenje na osnovu koga mogu i neposredno da se napišu. Iz tih jednačina i odnosa prikazanih na slici 2b zaključujemo da je εds komponenta u pravcu ose štapa onog vektora čije su komponente u pravcu koordinatnih osa du i dv a da je φds komponenta istog vektora u pravcu normale na osu štapa. Kako vektor čije su komponente u pravcu koordinatnih osa du i dv predstavlja razliku vektora pomeranja tačaka c i c_1 to sledi da je u okviru teorije malih deformacija:

εds – komponenta razlike pomeranja krajnjih tačaka elemenata ose u pravcu elemenata, a da je

φds – komponenta razlike pomeranja krajnjih tačaka elementa ose upravna na pravac elemenata.



Sl. 3

Veze koje postoje između deformacijskih veličina i komponenti pomeranja u i v, postoje i između deformacijskih veličina i komponenti pomeranja ξ i η. Na slici 3a prikazan je element ose cc_1 pre i posle deformacije pri čemu su pomeranja krajnjih tačaka elemenata razložena na komponente u pravcu tangente i u pravcu normale u odgovarajućoj tački ose štapa. Veze defermacijskih veličina i pomeranja ξ i η dobijamo iz uslova da je razlika projekcije elementa $c'c_1'$ i elementa cc_1 u pravcu tangente i u pravcu normale na osu štapa u tački c jednaka razlici projekcije pomeranja tačke c_1 i tačke c u pravcu tangente i u pravcu normale:

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon)\cos\varphi ds - ds &= (\xi + d\xi)\cos d\alpha - (\eta + d\eta)\sin d\alpha - \xi,\\ (1+\varepsilon)\sin\varphi ds \quad &= (\xi + d\xi)\sin d\alpha + (\eta + d\eta)\cos d\alpha - \eta.\end{aligned}$$

Kada u ove jednačine unesemo $\cos d\alpha = 1$ a $\sin d\alpha = d\alpha$; zanemarimo proizvode diferencijalnih veličina; obe jednačine podelimo sa ds i stavimo da je:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho} \tag{9}$$

gde je ρ poluprečnik krivine ose štapa, one mogu da se napišu u obliku:

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon)\cos\varphi &= 1 + \frac{d\xi}{ds} - \frac{\eta}{\rho},\\ (1+\varepsilon)\sin\varphi &= \frac{\xi}{\rho} + \frac{d\eta}{ds}\end{aligned} \tag{10}$$

Veze (10) su veze deformacija i pomeranja ξ i η u teoriji konačnih odnosno teoriji velikih deformacija. Odgovarajuće veze teorije malih deformacija dobijamo iz njih kada stavimo da je $\cos\varphi = 1$ a $\sin\varphi = \varphi$ i zanemarimo proizvod veličina ε i φ:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{d\xi}{ds} - \frac{\eta}{\rho},\\ \varphi &= \frac{\xi}{\rho} + \frac{d\eta}{ds}.\end{aligned} \tag{11}$$

Polazeći od značenja veličine εds i φds u teoriji malih deformacija, veze (11) mogu da se napišu i geometrijskim razlaganjem razlike pomeranja tačaka c_1 i c kao šta je to učinjeno na slikama 3b i 3c. Na slici 3b je vektorska razlika pomeranja $\xi + d\xi$ i ξ razložena na komponentu $d\xi$ u pravcu elementa i komponentu $\xi d\alpha$ upravnu na pravac elementa a na slici 3c je vektorska razlika pomeranja $\eta + d\eta$ i η razložena na komponentu $-\eta d\alpha$ u pravcu elementa i komponentu $d\eta$ upravnu na pravac elementa. Ukupna razlika pomeranja u pravcu elementa εds, odnosno upravna na pravac elementa φds, je tada:

$$\begin{aligned} \varepsilon ds &= d\xi - \eta d\alpha, \\ \varphi ds &= \xi d\alpha + d\eta. \end{aligned} \tag{12}$$

Iz jednačina (12) i jednačine (9) slede jednačine (11).

1.1.3. Deformacija štapa

Kada govorimo o deformaciji štapa kao tela polazimo od *Bernoulli*-jeve (Bernuli) pretpostavke *da se poprečni preseci štapa ne deformišu, da pri deformaciji ostaju ravni i upravni na deformisanu osu štapa*.

Bernoulli-jeva pretpostavka je osnovna pretpostavka tehničke teorije savijanja štapa. Njome se trodimenzionalni problem deformacije štapa kao tela svodi na jednodimenzionalni problem deformacije njegove ose. Međutim, iz Otpornosti materijala je poznato da je *Bernoulli*-jeva pretpostavka tačna samo za prave prizmatične štapove opterećene na čisto savijanje. Kada je štap savijan silama, tj. kada pored momenata savijanja postoje i transverzalne sile, poprečni preseci se vitopere. Uticaj vitoperenja preseka, tj. uticaj transverzalnih sila na deformaciju štapa redovno je tako mali da može ili potpuno da se zanemari, ili da se približno odredi zadržavajući pretpostavku da poprečni preseci ostaju ravni, ali da posle deformacije nisu više normalni na deformisanu osu štapa.

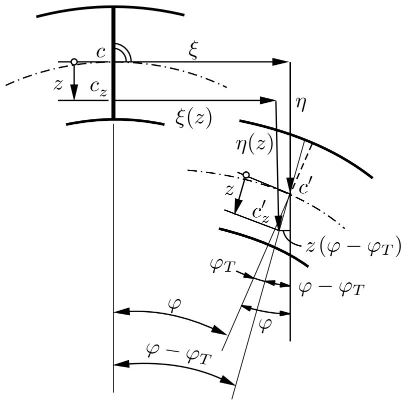
Na slici 1 prikazan je deo jednog krivog štapa pre i posle deformacije i punijim linijama istaknut poprečni presek u tački c nedeformisane ose, odnosno u tački c' deformisane ose. Pri ravnoj deformaciji osa štapa i posle deformacije ostaje u ravni štapa a poprečni preseci normalni na tu ravan. Kako se poprečni preseci ne deformišu sve tačke preseka koje leže na pravoj normalnoj na ravan štapa imaju ista pomeranja, a tačka c_z u ravni štapa, koja je pre deformacije bila na odstojanju z od tačke c i posle deformacije je na odstojanju z od odgovarajuće tačke deformisane ose.

Ako promenu pravog ugla između poprečnog preseka i ose štapa, odnosno ugao između poprečnog preseka i normale na osu štapa posle deformacije obeležimo sa φ_T i usvojimo da je φ_T pozitivno u smeru suprotnom od pozitivnog smera obrtanja ugla φ, tada je ugao za koji se obrne poprečni presek jednak razlici $\varphi - \varphi_T$, slika 1. Iz slike čitamo da između pomeranja $\xi(z)$ i $\eta(z)$ tačke c_z, ugla obrtanja preseka $\varphi - \varphi_T$ i pomeranja ξ i η tačke c postoje veze:

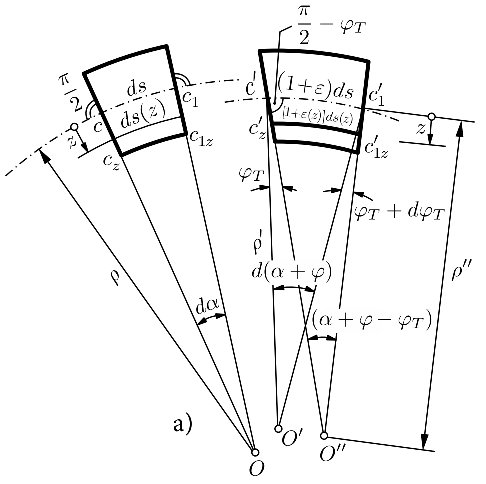
$$\begin{aligned} \xi(z) &= \xi - z\sin(\varphi - \varphi_T), \\ \eta(z) &= \eta - z\big[1 - \cos(\varphi - \varphi_T)\big], \end{aligned} \tag{1}$$

tj. u slučaju malih deformacija ($\sin(\varphi - \varphi_T) = \varphi - \varphi_T$ a $\cos(\varphi - \varphi_T) = 1$):

$$\begin{aligned} \xi(z) &= \xi — z(\varphi - \varphi_T), \\ \eta(z) &= \eta. \end{aligned} \tag{2}$$



Sl. 1



Sl. 2

Kako uglovi φ mogu da se izračunaju iz jednačine (10) odnosno (11) poglavlja 1.1.2 kada su poznata pomeranja ξ i η, iz jednačina (1) odnosno (2) sledi da su pomeranja $\xi(z)$ i $\eta(z)$ određena kada pored pomeranja tačaka ose ξ i η poznajemo obrtanja φ_T. Obrtanja φ_T, koja nazivamo i *klizanja štapa*, slično dilatacijama ose ε su čisto deformacijske veličine, tj. veličine koje postoje samo na onim mestima na kojima se štap deformiše, a koje su jednake nuli na mestima na kojima se štap ne deformiše.

U sledećem biće nam potrebna dilatacija ekvidistantnog elementa, tj. elementa na odstojanju z od ose štapa, koju ćemo obeležiti sa $\varepsilon(z)$. Da bismo sračunali veličinu $\varepsilon(z)$ posmatraćemo zapreminski elemenat štapa između dva beskonačno bliska poprečna preseka. Na slici 2 prikazan je taj elemenat pre i posle deformacije. Između dužine ose elementa ds, dužine ekvidistantnog elementa $ds(z)$, kontigentnog ugla $d\alpha$, i poluprečnika krivine štapa ρ pre deformacije postoje veze:

$$\begin{aligned} ds &= \rho\, d\alpha, \\ ds(z) &= (\rho - z)\, d\alpha. \end{aligned} \tag{3}$$

Odnose odgovarajućih veličina posle deformacije $(1+\varepsilon)\,ds$, $[1+\varepsilon(z)]\,ds(z)$, $d(\alpha+\varphi-\varphi_T)$ i ρ'', dobijamo iz sinusne teoreme za trouglove $O''c'c'_1$ i $O''c'_zc'_{1z}$:

$$\frac{(1+\varepsilon)ds}{\sin d(\alpha+\varphi-\varphi_T)} = \frac{\rho''}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi_T\right)},$$

$$\frac{\big[1+\varepsilon(z)\big]ds(z)}{\sin d(\alpha+\varphi-\varphi_T)} = \frac{\rho''-z}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi_T\right)},$$

tj.

$$(1+\varepsilon)\cos\varphi_T ds = \rho'' d(\alpha+\varphi-\varphi_T),$$

$$\big[1+\varepsilon(z)\big]\cos\varphi_T ds = (\rho''-z)\, d(\alpha+\varphi-\varphi_T).$$