1

Osnove geometrije

U OVOM DELU. . .

Otkrijte zašto je geometrijia važna.

Razumite tačke, prave, uglove, ravni i druga osnovna geometrijska tela.

Merite i koristite duži i uglove.

U OVOM POGLAVLJU

» **Pogled u geometriju: oblici i dokazi**

» **Otkrijte „Čemu uopšte služi geometrija?“**

Poglavlje **1**

Uvod u geometriju

Učenje geometrije je neka vrsta dr Džekilovske i mr Hajdovske stvari. Imate običnu, svakodnevnu geometriju oblika (dr Džekila) i čudan svet geometrijskih dokaza (deo mr Hajda).

Svakoga dana vidite razne oblike svuda oko sebe (trouglove, pravougaonike, kutije, krugove, lopte itd.) i verovatno ste već upoznati sa nekim od njihovih svojstava. Na primer sa površinom, obimom i zapreminom. U ovoj knjizi otkritićete mnoge stvari o ovim osnovnim svojstvima, a zatim ćemo istražiti naprednije geometrijske ideje o oblicima.

Geometrijski dokazi su sasvim druga zver. Oni se bave oblicima, ali umesto da sa njima radite nešto jednostavno kao što je izračunavanje njihove površine, morate da smislite čvrstu matematičku argumentaciju koja dokazuje nešto o obliku. Ovaj proces zahteva ne samo matematičke veštine, već i verbalne veštine i veštinu logičke dedukcije, i zato dokazivanje pravi problem mnogima. Ako ste jedan od ovih koji smatrate da su dokazi monstrumi – kao što je gospodin Hajd – uveren sam da, uz pomoć ove knjige, nećete imati problema da ih ukrotite.

Ovo poglavlje je vaš ulaz u senzacionalnu i spektakularnu (ali ponekad pomalo zapanjujuću) temu ove knjige: geometriju. Ako ste u iskušenju da pitate: „Zašto bi me bilo briga za geometriju?“ ovo poglavlje će vam dati odgovor.

Geometrija oblika

Da li ste ikada razmišljali o tome da ste doslovno okruženi oblicima? Pogledaj oko sebe. Sunčevi zraci. Šta su oni? Zraci. Knjiga u vašim rukama ima oblik, svaki sto i stolica imaju oblik, svaki zid ima površinu, a svaki kontejner ima oblik i zapreminu; većina okvira za slike su pravougaoni, CD-ovi i DVD-ovi su krugovi, konzerve su cilindri, i tako dalje i tako dalje. Možete li da zamislite bilo koju čvrstu stvar koja nema oblik? Ovaj odeljak vam daje kratak uvod u ove jedno, dvo i trodimenzionalne oblike koji su sveprožimajući i sveprisutni, spominjemo svuda oko vas.

Jednodimenzionalni oblici

Nema mnogo oblika koje možete da napravite ako ste ograničeni na jednu dimenziju. To su prave linije, delovi prave linije i zraci. To je sve. Ali iz toga ne sledi da postojanje samo jedne dimenzije čini ove stvari nevažnim – ni najmanje. Bez ovih jednodimenzionalnih objekata, ne bi bilo dvodimenzionalnih oblika; a bez 2D oblika ne možete imati 3D oblike. Razmislite o tome: 2D kvadrati se sastoje od četiri 1D duži, a 3D kocke se sastoje od šest 2D kvadrata. I bilo bi veoma teško raditi matematiku bez jednostavne 1D koridnate ili bez sofisticiranijeg 2D koordinatnog sistema, kojem su potrebne 1D kordinate x i y ose. (U Poglavlju 2 pokrivam prave (linije), duži i poluprave; Poglavlje 18 govori o koordinatnoj ravni.)

Dvodimenzionalni oblici

Kao što verovatno znate, dvodimenzionalni oblici su ravne površine poput trouglova, krugova, kvadrata, pravougaonika i petougaonika. Dve najčešće karakteristike koje proučavamo o 2D oblicima su njihova površina i obim (perimetar). Ovi geometrijski koncepti se pojavljuju u bezbroj situacija u stvarnom svetu. Koristite 2D geometriju, na primer, kada izračunavate površinu zemljišne parcele, broj kvadratnih metera u kući, veličinu i oblik tkanine potrebne za izradu zavesa ili odeće, dužinu staze za trčanje, dimenzije okvira za slike i tako dalje. Formule za izračunavanje površine i obima 2D oblika su obrađene u Delovima 3 do 5.

Mnoga poglavlja u ovoj knjizi posvećujem trouglovima i četvorouglovima, tj. *trapezima* (2D oblicima sa četiri stranice). Dajem manje prostora oblicima koji imaju više stranica, kao što su petouglovi i šestouglovi. Oblici bilo kog broja pravih stranica, nazivaju se *poligoni* i imaju naprednije karakteristike kao što su dijagonale, apoteme i spoljašnji uglovi, koje prikazujem u Delu 4.

Verovatno ste upoznati sa nekim oblicima koji imaju zakrivljene stranice, kao što su krugovi, elipse i parabole. Krug je jedini zakrivljeni 2D oblik koji je obrađen u ovoj knjizi. U Delu 5 istražujete sve vrste interesantnih svojstava kruga uključujući prečnke, poluprečnike, tetive, tangente i tako dalje.

ISTORIJA PROUČAVANJA OBLIKA

Proučavanje geometrije je uticalo na arhitekturu, inženjerstvo, astronomiju, fiziku, medicinu i ratovanje, između ostalih oblasti, na bezbroj načina više od 5.000 godina. Sumnjam da će se ikada utvrdi datum otkrića jednostavne formule za površinu pravougaonika $(\mathbf{površina} = \mathbf{dužina} \cdot \mathbf{širina})$ ali je verovatno otkrivena pre pisma i datira od nekih najranijih zamljoradnika. Neki od najranijih zapisa iz Mesopotamije (oko 3500. godine p.n.e.) govore o površini polja i imanja. Kladim se da su čak i zemljoradnici iz Mesopotamije znali da ako jedan od njih zasadi površinu tri puta dužu i dva puta širu od drugog, onda bi veća parcela bila $3 \cdot 2$, odnosno 6 puta veća od manje.

Arhitekte piramida u Gizi (sagrađene oko 2500. godine p.n.e.) znali su kako da konstruišu prave uglove koristeći trougao 3-4-5 (jedan od pravougaonih trouglova o kojima govorim u 8. poglavlju). Pravi uglovi su neophodni za uglove kvadratne osnove piramide, između ostalog. I naravno, verovatno ste čuli za Pitagoru (oko 570–500. p.n.e.) i čuvenu teoremu pravouglog trougla nazvanu po njemu (vidi Poglavlje 8). Arhimed (287–212 p.n.e.) je koristio geometriju da izmisli sistem koluturnika (čekrka). Razvio je sistem složenih koluturnika koje su mogle da podignu čitav ratni brod pun ljudi (za više Arhimedovih dostignuća, vidi Poglavlje 22). Kinezi su znali da izračunaju površinu i zapreminu mnogih različitih geometrijskih oblika i kako da konstruišu pravougli trougao, i to 100. godine p.n.e.

U novije vreme, Galileo Galilej (1564–1642) je otkrio jednačinu za kretanje projektila (vidi Poglavlje 22) i dizajnirao i napravio najbolji teleskop svog vremena. Johannes Kepler (1571–1630) merio je površinu preseka eliptičnih orbita planeta dok kruže oko Sunca. Rene Dekart (1596–1650) je zaslužan za pronalazak koordinatne geometrije, osnove za većinu matematičkih grafika (vidi Poglavlje 18). Isak Njutn (1642–1727) koristio je geometrijske metode u svojoj *Principia Mathematica*, čuvenoj knjizi u kojoj je izložio princip gravitacije.

Benjamin Franklin (1706–1790) koristio je geometriju za proučavanje meteorologije i okeanskih struja. Džordž Vašington (1732–1799) koristio je trigonometriju (napredno proučavanje trouglova) dok je radio kao geometar pre nego što je postao vojnik. Na kraju, ali svakako ne i najmanje važno, Albert Ajnštajn je otkrio jedno od najluđih pravila geometrije: da gravitacija iskrivljuje univerzum. Jedna posledica ovoga je da ako biste nacrtali džinovski trougao oko Sunca, zbir njegovih uglova bi zapravo bio malo veći od $180°$. Ovo je u suprotnosti sa pravilom $180°$ za trouglove (vidi Poglavlje 7), koje funkcioniše dok ne dođete do astronomske skale. Spisak najvažnijih stvari se nastavlja i nastavlja.

Trodimenzionalni oblici

Trodimenzionalne oblike obrađujem u Delu 6. Radićemo sa prizmama (kutija je jedan primer), cilindrima, piramidama, konusima i sferama. Dve glavne karakteristike ovih 3D oblika, koje obrađujem u 17. poglavlju, su njihova *površina* i *zapremina*.

Trodimenzionalni koncepti poput zapremine i površine često se pojavljuju u stvarnom svetu; primeri uključuju količinu vode u akvarijumu ili u bazenu. Količina papira za umotavanje koja vam je potrebna za umotavanje poklon kutije zavisi od njene površine. A ako ste hteli da izračunate površinu i zapreminu Velike piramide u Gizi ne možete da to uradite bez 3D geometrije.

Evo nekoliko ideja o tome kako su tri dimenzije međusobno povezane. 2D oblici su zatvoreni svojim stranicama, koje su 1D duži; 3D oblici su zatvoreni svojim stranicama, koja su 2D poligoni. A evo primera iz stvarnog sveta odnosa između 2D površine i 3D zapremine: 5 litara boje (3D zapremina) može pokriti određeni broj kvadratnih metara površine na zidu (2D površina). (Boja na zidu je zapravo 3D oblik. Ima dužinu i širinu (zida), a treća dimenzija je debljina sloja boje. Ako ove tri dimenzije pomnožite zajedno, dobićete zapreminu boje.)

Upoznavanje sa geometrijskim dokazima

Geometrijski dokazi su neobičnost u matematičkom pejzažu, i skoro jedino mesto gde ćete sresti sa njima je na kursu geometrije. Ako ste trenutno na kursu i pitate se koja je svrha proučavanja nečega što više nikada nećete koristiti, na to ću doći za minut u odeljku „Da li ću ovo ikada koristiti?“ Za sada, samo želim da vam dam vrlo kratak opis šta je geometrijski dokaz.

Geometrijski dokaz, kao i svaki matematički dokaz, je argument koji počinje poznatim činjenicama, nastavlja se odatle nizom logičkih zaključivanja i završava se stvarima koje pokušavate da dokažete.

Matematičari pišu dokaze, u geometriji kao i u svim drugim oblastima matematike, više od 2000 godina. (Pogledajte izdvojeni tekst o Euklidu i Istoriji geometrijskih dokaza.) Glavni posao današnjeg matematičara je dokazivanje stvari pisanjem formalnih dokaza. Tako napreduje oblast matematike: kako se sve više i više ideja dokazuje, sveukupno matematičko znanja raste. Dokazi su uvek imali, i još uvek imaju, značajnu ulogu u matematici. I to je jedan od razloga zašto ih proučavate. Deo 2 se bavi svim detaljima o dokazima; u odeljcima koji slede, upućujem vas u pravom smeru.

Lakši put do dokaza na svakodnevnom primeru

Verovatno to nikada niste shvatili, ali ponekad kada razmišljate o situaciji u svom svakodnevnom životu, koristite istu vrstu deduktivne logike koja se koristi u geometrijskim dokazima. Iako su slučajevi različiti, osnovna priroda procesa zaključivanja je ista.

Evo primera logike iz stvarnog života. Recimo da ste na zabavi kod Sandre. Zaljubljeni ste u Sandru, ali ona izlazi sa Džonijem već nekoliko meseci. Na žurci se osvrnete se okolo i primetite Džonija kako razgovara sa Džudi, a malo kasnije vidite kako izlaze napolje na nekoliko minuta. Kada se vrate unutra, Džudi nosi Džonijev prsten. Niste od juče, pa ste spojili dva i dva i shvatili da je Sandrina veza sa Džonijem u problemu i, u stvari, može da se završi svakog trenutka. Bacate pogled u Sandrinom pravcu i vidite je kako izlazi iz sobe sa suzama u očima. Kada se vrati, shvatate da nije loša ideja da odete i razgovarate s njom.

(Uzgred, ova priča o žurci koja je prošla loše zasnovana je na hitu broj 1 Lesley Gore iz 60-ih, „It's My Parti“. Pesma u nastavku, takođe hit, „Judy's Turn to Cry,“ priča kako se Sandra vratila Judy. Pogledajte tekst pesama na mreži.)

Ovaj scenario sa zabave možda ne izgleda kao da sadrži deduktivno razonovanje. Deduktivno zaključivanje ima tendenciju da sadrži mnogo koraka ili lanac logike poput: „Ako A, onda B; a ako je B, onda C; ako je C, onda D; i tako dalje.” Fijasko na žurci možda ne izgleda ovako, jer biste ga verovatno videli kao pojedinačni incident. Vidite kako Džudi ulazi sa Džonijevim prstenom, bacite pogled na Sandru i vidite da je uznemirena i ceo scenario vam je jasan u trenu. Sve je očigledno – čini se da nema logičke dedukcije.

Pretvaranje svakodnevne logike u dokaz

Zamislite da ste morali da objasnite čitav svoj proces razmišljanja o situaciji na žurci nekome ko apsolutno ne zna kako se ljudi ponašaju. Na primer, da ste morali da objasnite svoje razmišljanje hipotetičkom Marsovcu koji ne zna ništa o našim zemaljskim običajima. U ovom slučaju, *trebalo bi* da ga vodite kroz rezonovanje korak po korak.

Evo kako bi vaša argumentacija mogla da ide:

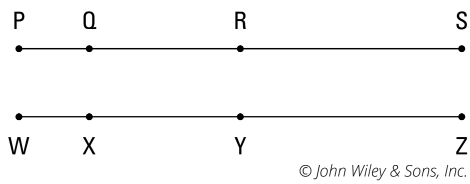
1. Sandra i Džoni su u vezi (ovo je činjenica).
2. Džoni i Džudi izlaze napolje na nekoliko minuta (data činjenica).
3. Kada se Džudi vrati, ima novi prsten na ruci (takođe dato).
4. Dakle, ona nosi Džonijev prsten (*mnogo* verovatnije nego, recimo, da ga je našla na zemlji napolju).
5. Zbog toga, Džudi izlazi sa Džonijem (jer kada mladić pokloni devojci svoj prsten, to znači da su u vezi).

6. Stoga će Sandra i Džoni raskinuti vezi (jer devojka neće nastaviti da izlazi sa momkom koji je drugoj devojci upravo dao svoj prsten).
7. Stoga će Sandra uskoro biti slobodna (jer to se dešava pošto neko raskine).
8. Zato bi trebalo da odem do nje i razgovaram sa njom.

Ovaj proces u osam koraka vam pokazuje da zaista postoji lanac logičkih zaključaka koji se odvija ispod površine, iako bi u stvarnom životu vi u trenu shvati šta se dešava Sandri. Ali proces vam daje uvid u zaključivanje korak po korak koji se nalazi u dokazima geometrije. Videćete prvi geometrijski dokaz u sledećem odeljku.

Jednostavan geometrijski dokaz

Geometrijski dokazi su kao proces rezonovanja u prethodnom odeljku, samo sa mnogo manje drame. Oni prate niz međuzaključaka koji vode do konačnog zaključka: Počevši od nekih datih činjenica, recimo A i B, nastavljate i kažete *sledi* C; onda *sledi* D; onda *sledi*, E; i tako dalje dok ne dođete do konačnog zaključka. Evo veoma jednostavnog primera korišćenjem duži (delova prave) na slici 1-1.



SLIKA 1-1: Duži $\overline{PS}$ i $\overline{WZ}$, svaka sastavljena od tri dela.

Za ovaj dokaz, data vam je da je duž $\overline{PS}$ *podudarna* (eng. congruent), tj. identična, iste dužine sa duži $\overline{WZ}$, da je $\overline{PQ}$ podudarna sa $\overline{WX}$ i da je $\overline{QR}$ podudarana sa $\overline{XY}$. (Umesto da sve vreme govorite podudarno, možete jednostavno koristiti simbol $\cong$ koji znači istu stvar.) Vaš zadatak je da dokažete da je $\overline{RS} \cong \overline{YZ}$. Sada, možda mislite, „To je očigledno – ako je $\overline{PS}$ iste dužine kao i $\overline{WZ}$ obe duži sadrže jednake kraće duži i jednake srednji duži, tada dužine treće duži takođe moraju biti jednake.“ Naravno, u pravu ste. Ali tako se ne dokazuje. Morate da navedete svaki mali korak u svom razmišljanju kako vaše rezonovanje ne bi imao praznine. Evo celog lanca logičkih zaključaka:

1. $\overline{PS} \cong \overline{WZ}$ (ovo je dato).
2. $\overline{PQ} \cong \overline{WX}$ i $\overline{QR} \cong \overline{XY}$ (i ovo je dato).
3. Sledi, $\overline{PR} \cong \overline{WY}$ (jer ako dodate jednake stvari jednakim stvarima, dobijate jednake ukupne vrednosti).
4. Sledi, $\overline{RS} \cong \overline{YZ}$ (jer ako počnete sa jednakim dužima, cele duži $\overline{PS}$ i $\overline{WZ}$, i oduzmite im jednake duži, $\overline{PR}$ i $\overline{WY}$, duži koje su ostale moraju biti jednake).

U formalnim dokazima pišete svoje izjave (tvrdnje) (kao $\overline{PR} \cong \overline{WY}$ u koraku 3) u jednu kolonu, a svoja obrazloženja za te izjave u drugu kolonu. Poglavlje 4 to pokazuje.

MRZITE DOKAZE? EUKLID JE KRIV.

Euklidu (oko 385–275. p.n.e.) se obično pripisuje da je zakotrljao loptu geometrijskih dokaza. (Ako imate problema sa dokazima, sada znate koga da krivite.) Njegov pristup je bio da počne sa nekoliko nedefinisanih pojmova kao što su *tačka* i *prava*, a zatim da gradi na njima, pažljivo definišući druge pojmove kao što su *duži* i *uglovi*. Takođe je shvatio da bi trebalo da počne sa nekim nedokazivim principima (zvanim *postulati*) za koje bi jednostavno morao da pretpostavi da su istiniti.

Počeo je sa deset postulata, kao što su „duž se može nacrtati spajanjem bilo koje dve tačke" i „dva objekta od kojih je svaki jednak trećem objektu, međusobno su jednaki". Nakon što je postavio pojmove koji se ne definišu, definicije i postulate, započeo je njegov pravi rad. Koristeći ove tri kategorije stvari, dokazao je svoju prvu *teoremu* (dokazan geometrijski princip), koja je bila metoda stranica-ugao-stranica za dokazivanje podudarnosti trouglova (vidi Poglavlje 9). A onda je dokazao još jednu teoremu i još jednu i tako dalje.

Kada je teorema dokazana, mogla bi se koristiti (zajedno sa nedefinisanim terminima, definicijama i postulatima) za dokazivanje drugih teorema. Ako radite na dokazima u standardnom kursu geometrije u srednjoj školi, krećete se stopama Euklida, jednog od giganata u istoriji matematike - bravo!

Da li ću ovo ikada koristiti?

Verovatno ćete imati mnogo prilika da koristite svoje znanje o geometriji oblika. A šta je sa geometrijskim dokazima? Neće biti mnogo prilika. Čitajte dalje.

Kada ćete iskoristiti svoje znanje o oblicima

Oblici su svuda, tako da svaka obrazovana osoba treba da ima upotrebljivo znanje o oblicima i njihovim osobinama. Geometrija oblika se često pojavljuje u svakodnevnom životu, posebno kod merenja.

U svakodnevnom životu, ako morate da kupite tepihe ili đubrivo ili seme trave za travnjak, trebalo bi da znate nešto o toj oblasti. Možda ćete želeti da razumete mere u receptima ili na etiketama namirnica, ili možda želite da pomognete detetu u umetničkom ili školskom zadatku u kome ima geometrije. Svakako morate da razumete nešto o geometriji da biste napravili neke police ili klupu u dvorištu. A nakon što završite svoj posao, možda ćete biti gladni – razumevanje funkcionisanja stvari u nekoj oblast od koristi je kada naručujete picu: pizza prečnika 40 cm je četiri, a ne dva puta veća od pizze prečnika 20 cm, a pizza od 28 cm je dvostruko veća od pizze od 20 cm. (Vidi Poglavlje 15)

PROFESIJE KOJE KORISTE GEOMETRIJU

Evo kratke ture po profesijama koje koriste geometriju. Umetnici koriste geometriju za merenje platna, pravljenje okvira i dizajn skulptura. Građevinari je koriste u skoro svemu što rade; isto je sa stolarima. Za stomatologe, oblik zuba, karijesa i ispuna predstavlja veliki problem geometrije. Proizvođači mleka koriste geometriju kada izračunavaju zapreminu mleka u litrima. Kamenoresci koriste geometriju svaki put kada seku kamen.

Proizvođači naočara koriste geometriju na bezbroj načina kad god koriste nauku optike. Piloti borbenih aviona (ili sportski napadači ili bilo koji drugi koji ciljaju metu u pokretu) moraju da razumeju uglove, udaljenost, putanju i tako dalje. Prodavci semena trave moraju da znaju koliko semena kupci treba da koriste po kvadratnom metru ili po jutru. Piloti helikoptera koriste geometriju (zapravo, njihovi kompjuterizovani instrumenti rade umesto njih) za sve proračune koji utiču na poletanje i sletanje, skretanje, brzinu vetra, podizanje, otpor, ubrzanje i slično. Proizvođači muzičkih instrumenata moraju da koriste geometriju kada prave trube, klavire, violine, itd. Spisak nema kraj...

Kada ćete iskoristiti svoje znanje o dokazima

Da li ćete ikada iskoristiti svoje znanje o gemetrijskim dokazima? U ovom odeljku dajem vam dva odgovora na ovo pitanje: politički korektan i politički nekorektan. Na vama je izbor.

Prvi, politički korektan odgovor (koji je *zapravo* tačan). Iskreno, veoma je malo verovatno da ćete ikada uraditi barem jedan geometrijski dokaz van škole. Međutim, izvođenje dokaza uči vas važnim lekcijama koje možete primeniti na nematematičku argumentaciju. Između ostalog, dokazi vas uče sledećem:

- Da ne pretpostavljte da su stvari istinite samo zato što na prvi pogled izgledaju istinito.
- Da veoma pažljivo objasnite svaki korak u obrazloženju čak i ako mislite da je očigledan svima.
- Da nalazite propuste u vašem zaključivanju.
- Da ne donosite brzoplete zaključke.

Generalno, dokazi vas uče da budete disciplinovani i rigorozni u svom razmišljanju i načinu na koji saopštavate svoje misli.

Ako vam se ovo ne sviđa, siguran sam da će vam se svideti politički nekorektan odgovor: Nikada nećete koristiti geometrijske dokaze. Ali želite da dobijete dobru ocenu iz geometrije, zar ne? Tako da biste mogli da pazite na času, da uradite svoj domaći zadatak i koristite upustva, savete i strategije koje vam dajem u ovoj knjizi. Mnogo će vam olakšati život. Obećavam.

Zašto nećete imati problema sa geometrijom

Geometrija, posebno dokazi, mogu biti komplikovani. Matematički, to je nepoznata teritorija sa preprekama na putu. Ali daleko od toga da je nesavladiva, i možete učiniti nekoliko stvari da bi vaše geometrijsko putovanje išlo glatko:

- **Pomoć na putu:** Ako zaglavite sa dokazom, pogledajte korisne savete i upozorenja koja vam dajem u svakom poglavlju. Možete pogledati i Poglavlje 21 zbog deset najvažnijih ideja o dokazima. Možete da odete u Poglavlje 6 da vidite kako da obrazložite svoj put kroz dugačak, komplikovan dokaz.
- **Nalaženje formula:** Ako ne možete da otkrijete problem koji koristi geometrijsku formulu, možete pogledati onlajn puškice (eng. cheat sheets) da biste se uverili da imate tačnu formulu. Jednostavno idite na www.dummies.com i unesite Geometry For Dummies Cheat Sheet“ u polje za pretragu.
- **Istaknite:** Moj glavni savet je da nikada ne odustajete od problema. Što je veći broj škakljivih problema koje konačno pobedite, to ćete više iskustva steći da vam pomogne da pobedite sledeći. Nakon što prihvatite sve moje stručne savete – ne hvalim se, navodim činjenicu – trebalo bi da imate sve alate koji su vam potrebni da se suočite sa svime što vam profesor geometrije ili zaluđenik za geometriju može zadati.