УНИВЕРЗИТЕТ У ИСТОЧНОМ САРАЈЕВУ
ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Мирјана Вуковић
Видан Говедарица

ГРУПЕ ГЕОМЕТРИЈСКИХ ПРЕСЛИКАВАЊА

Београд, Источно Сарајево, 2024

Академик Мирјана Вуковић,
проф. др Видан Говедарица

ГРУПЕ ГЕОМЕТРИЈСКИХ ПРЕСЛИКАВАЊА

Рецензенти
Проф. др Сања Рашовић-Јанчић,
Универзитет Црне Горе, Природно-математички факултет Подгорица
Проф. др Душан Јокановић,
Универзитет у Источном Сарајеву, Факултет за производњу и менаџмент Требиње

Издавач
Академска мисао Београд,
Универзитет у Источном Сарајеву, Електротехнички факултет

Техничка обрада текста: проф. др Видан Говедарица

Израда слика: Бојана Чолић, мр

Дизајн насловне стране
дипл. инг. Нино Хасановић

Штампа
Академска мисао, Београд

Тираж: 300 примјерака

ISBN 978-86-6200-043-9

Одлуком научно–наставног вијећа Електротехничког факултета Универзитета у Источном Сарајеву број 03-2017/23 од 11.12.2023. године, књига *Групе геометријских пресликавања* прихваћена је као уџбеник.

Садржај

Предговор

Иако сам давно планирала да напишем књигу *Геометријска пресликавања*, према програму предмета Геометрија II, на којем сам, својевремено, држала вјежбе студентима четврте године математике Природно-математичког факултета у Сарајеву, код проф. др *Шефкије Раљевића*, књигу под насловом ***Групе геометријских пресликавања*** сам написала тек сада, заједно са проф. др Виданом Говедарицом, али у модернијем облику – с аспекта теорије група.

Књига је подијељена на 7 глава: у првој (уводној) глави књиге се уводе основни појмови групе, подгрупе и дјеловања групе на скуп, а затим се, у другој глави говори о ортогоналним пресликавањима и пресликавањима сличности. У трећој глави књиге се уводе и проучавају афина пресликавања, а у четвртој глави пројективно пресликавање. Слиједе пета глава, у којој су изложене афина и еквиформна геометрија, као и геометрија групе пројективних аутоморфизама и шеста глава у којој су обрађене Мебијусове трансформације уз коју се проучавају Риманова сфера и стереографска пројекција, док је, у седмој глави, обрађена хиперболичка раван у којој се посматрају Мебијусове трансформације на јединичном диску, хиперболичка геометрија на диску и на полуравни, те Фуксове (*Fuchs*) групе – подгрупе групе Мебијусових трансформација, генерисане једним елементом и групе троугла и модуларна група.

Дакле, ова књига својим садржајем обухвата градиво предвиђено наставним планом предмета Геометрија II, с тим што смо стандардном градиву, које је годинама предавано на Одсјеку за математику у Сарајеву, додали стереографску пројекцију, Мебијусову трансформацију и Фуксове групе и тако геометрију повезали с комплексном анализом.

Познато је да је геометрија прешла дугачак пут и да су у њеном развоју дали врло значајне доприносе неки од најпознатијих математичара у историји, као и да се над геометријом није никада скидао вео мистицизма, јер, над геометријом мистицизма није никада ни било.

Исто тако, можемо рећи да се математика појавила с геометријом, као и да је математика стара колико и филозофија, с обзиром да су први филозофи били и математичари, а геометрија била једна од првих и најстаријих грана математике.

Наиме, геометрија се појавила са мјерењем земље, што и њено име потврђује и везује се за практичне потребе мјерења површина земљишних посједа и запремина посуда, складишта итд. Тако су најједноставније чињенице из математике биле познате већ у Месопотамији и Египту (3100 година прије нове ере), али су тада имале више емпиријски, него дедуктивни карактер.

Нови период у развоју геометрије почиње у VII вијеку прије нове ере, у старој Грчкој с Талесом из Милета (624–540 године п.н.е.) за ког се сматра да је знање из Египта пренио у Грчку. Већ тада су, у филозофским школама Талеса и Питагоре (547–495 године п.н.е.) рјешавани класични проблеми дупликације коцке, квадратуре круга и трисекције угла, али и откривене бројне нове законитости, као што су Талесова и Питагорина теорема.

Међу најзначајнијим математичарима оног времена свакако треба споменути изванредне грчке математичаре попут Еуклида који је живио у Александрији око 300–те године прије нове ере, по којем је прва геометрија и добила име Еуклидска геометрија.

Од најстаријих времена, када су дефинисани основни облици и форме, праве и углови, проучавање мјерења је стално напредовало што је довело до бољег разумијевања великог броја ,,рачунања” која су се односила на разне геометријске облике.

Тако су велики математичари захваљујући идејама и увођењу формула и других концепата који су допринијели бољем разумијевању геометрије, давали значајан допринос развоју геометрије, а тиме и математике.

Осим тога, дуго се, методом покушаја и погрешака, безуспјешно покушавало реалистички пресликати стварност на раван. Тако, рецимо, сликари нису дуго могли да схвате због чега се углови и омјери на слици не подударају с угловима и омјерима у стварном свијету.

Италијански математичар Филипо Брунелески (*Fillippo Brunelleschi*) је тек, у вријеме ренесансе, уз помоћ умјетности и науке дошао до значајних помака. Посматрајући крстионицу у Фиренци и зграде око ње, примијетио је да нихов приказ тежи бесконачно далекој тачки. Провјеравајући то експериментално, помицао је огледало горе – доле, посматрајући час одраз слике у огледалу час стварну крстионицу и тако уочио да међу њима нема разлике. Описујући рачунски своја запажања, тј. прецизно математички, дошао је до закона линеарне перспективе. Неколико година касније је Алберто Леони (*Alberto Leoni*), вративши се тим проучавањима, дошао до резултатâ које је објавио у радовима *De pictura* и *Della pittura*, који су били од великог значаја и помоћи, како умјетницима, тако и математичарима у даљим истраживањима у развоју перспективе.

Ипак, сматра се да је најзначајнији траг у тој области оставио универзални Леонардо да Винчи (*Leonardo da Vinci*) који се бавио инверзним проблемом перспективе, а затим и Албрехт Дирер (*Albrecht Dürer*) који је сва дотадашња сазнања о перспективи пренио на њемачко језичко подручје. Тако се од Еуклидске дошло до пројективне геометрије која нуди знатно елегантнија рјешења и објашњења од Еуклидове.

Иначе, сматра се да је идеју пројективне геометрије развио Жерар Дезарг (*Gérard Desargues*), бавећи се перспективом, али јој је значајан допринос дао још један француски математичар Блез Паскал (*Blaise Pascal*). Послије њих, скоро два вијека, све до појаве Виктора Понселеа (*Victor Poncelet*), није било значајних помака у области пројективне геометрије. Тако је, тек почетком 19. вијека, с Понселеом поново оживило интересовање за увођењем пројективног простора и открићем принципа дуалности. Захваљујући Карлу фон Штауду (*Karl von Staudt*) је, од 1847. године, пројективна геометрија онаква какву је данас познајемо – геометрија без метрике.

Иако нам се, због недостатка метрике, може чинити необичном и незанимљивом, пошто одудара од Еуклидске геометрије, лако се увјерити да није тако, јер се баш захваљујући њој долази до једноставнијих одговора на питања која се тичу перспективе.

Али свакако треба споменути и *нееуклидске геометрије* настале почетком 19. вијека као резултат истраживања везаних за проблеме утемељења геометрије и посебно проблеме паралела до којих су дошли Лобачевски (*Николай Иванович Лобачевский*) и Бољаи (*János Bolyai*). Заправо су дошли до закључка да је пети Еуклидов постулат независан од осталих, што их је довело до нове геометрије коју данас називамо *хиперболичком геометријом*. Значај њиховог закључка се огледа у томе што из њега слиједи да ни простор, као ни његова геометрија нису априори јединствено одређени, него су логички могуће различите варијанте, које се разликују по систему аксиома на којим су засноване.

Експеримент је требало да помогне да се дође до закључка која од геометрија је по особинама најближа реалном простору. У ту сврху су разрађени различити геометријски системи, као што су: пројективна геометрија, афина геометрија и елиптичка геометрија.

У том периоду су од посебног значаја и с далекосежним посљедицама биле идеје Бернарда Римана (*Georg Friedrich Bernhard Riemann*), који је 1854. године поопштио појам простора који је касније, по њему, назван *Римановим простором*. У том простору је задата дужина линијских елемената, тако да се мјерења коначних удаљености врше интеграцијом бесконачно малих одсјечака.

Током историјског развоја геометрије посебно мјесто су имали, како проблем њеног старог аксиоматског заснивања, као дедуктивног система, тако и проблеми непротивrјечности, потпуности и независности њене аксиоматике. Тај задатак, којег Еуклид, у својим *Елементима* није до краја ријешио, је 1899. године ријешио Давид Хилберт (*David Hilbert*). Осим њега, треба свакако споменути да је, за дефинисање и систематизацију различитих геометријских система, посебно значајну улогу имао, како Франц Клајн (*Franz Klein*), тако и његов *Ерлангенски програм*.

За разлику од старих времена и зачетака математике и наукâ уопште, у посљедних неколико десетљећа су теме из области геометрије, у школи, знатно редуциране, а један од главних разлога томе је, јер је дато више простора другим областима математике. Свакако треба истаћи да то није добро, јер је учење геометрије битно, с обзиром да ученицима помаже у развоју, како вјештине визуелизације и критичког мишљења, тако и интуиције, перспективе и рјешавања проблема, кроз дедуктивно образлагање логичких аргумената и доказа, што је довело до увођења вишедимензионалне геометрије.

Што се тиче односа геометрије и других области математике, можемо рећи да, док аритметика даје важност бројевима, алгебра рјешавању једначина, дотле геометрија објашњава особине и односе фигура у равни и простору и као таква игра веома важну улогу.

И на крају, споменућемо и препоручити читаоцу књигу *Еуклидов прозор* Леонарда Млодинова (*Leonard Mlodinow*) у којој нас он брилијантно проводи кроз развој цјелокупне геометрије и то кроз пет „револуција" у геометрији почев од грчког концепта паралелних правих до најновијих појмова хиперпростора. Та књига представља сасвим нову, алтернативну историју математике помоћу које се открива да једноставна питања у простору, која би се могла поставити било гдје, како на земљи, тако и на некој другој галаксији, заправо представљају скривени мотор – покретач највећих достигнућа у науци и технологији уопште.

Тако Еуклидов прозор Млодиновог историјског истраживања, представља изванредан спој, с једне стране ригорозног и ауторитативног истраживања, а са друге приступачног и добронамјерног приповиједања које представља запањујуће оригиналан аргумент којим се потврђује примат геометрије. За оне који су гледали кроз Еуклидов прозор, ниједан простор, ниједна ствар и вријеме никада неће бити исти.

Источно Сарајево, фебруар 2024.

Аутори:
Мирјана Вуковић
Видан Говедарица